数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 23-32

Heisenberg 群上の不変 CR-Laplacian 型作用素に関する固有空間について

伊師英之 (横浜市大 総合理)

序.

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ 上に, ユニタリ群 $\mathrm{U}(m)$ による回転, 正数群 $\mathbb{R}_+$ による拡大, $\mathbb{C}^m$ 自身による平行移動という 3 つの作用を考える. これらの作用を合わせたアファイン変換群 $G_0 := \mathbb{C}^m \rtimes (\mathbb{R}_+ \times \mathrm{U}(m))$ のユニタリ表現が Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{C}^m)$ 上に自然に定義されるが, 線形変換群 $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{U}(m)$ の反傾作用は $\mathbb{C}^m$ にエルゴード的に作用しているので, この表現は既約かつ 2 乗可積分であり, それに付随する連続ウェーブレット変換が定義できる ([1]).

類似の議論を可換なベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ の代わりに非可換な Heisenberg 群 $N \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ に置き換えて考える. 実際 Heisenberg 群 N 上にも直積群 $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{U}(m)$ が自己同型として作用しているので (§2 参照), N 自身による左移動と合わせた変換群 $G := N \rtimes (\mathbb{R}_+ \times \mathrm{U}(m))$ を考えることができる. この G は $\mathrm{SU}(m+1,1)$ の放物型部分群と局所同型である (§2 の Remark 参照). Hilbert 空間 $L^2(N)$ 上に定義される G のユニタリ表現は既約ではないが, 可算個の互いに同値でない既約表現に分解され, それぞれの表現に付随した連続 wavelet 変換が定義できる ([4], なお G の可解部分群 $N \rtimes \mathbb{R}_+$ に制限した場合の表現の分解については [5] 参照). これらの既約部分空間の幾何学的な特徴付けが, 本稿の主題である.

Heisenberg 群 N は階数 1 の Siegel 領域の Shilov 境界 Σ と同一視でき, Σ 上の自然な CR 構造を引き戻して N 上に左不変な CR 構造が得られる ([9]. §1 の Remark も参照). そして N 上の 2 乗可積分な CR 函数の空間は Σ 上の Hardy 空間を引き戻したものに他ならず, $L^2(N)$ の G-既約部分空間の 1 つになっている. よって N 上の CR 構造から定義される CR-Laplacian $\Box_b^q$ の固有空間として, $L^2(N)$ の他の既約部分空間を特徴付けるというのは自然な発想であろう. しかし, G の作用は CR 構造を保存するけれども, N 上のいかなる計量も保存しないので, この試みはうまくいかない ([6] も参照). そこで我々は N 上の各 q 次の CR-cochain の空間に, 通常の内積とは異なった G-共変性 (補題 3.1, 3.2) をもつ内積を Fourier 変換を経由して定め, 2 つの内積を使って 'CR-Laplacian 型作用素' $\tilde{\Box}_b^q$ を定義する. このとき共変性の差がうまく効いて (命題 3.4 の証明参照), $\tilde{\Box}_b^q$ は G の作用と可換になる (定理 3.5).

この $\tilde{\Box}_b^q$ はもはや微分作用素ではないが, Fourier 変換を通じて具体的に記述される (補題 4.1). そして この記述から q-cochain の空間の $\tilde{\Box}_b^q$ に関する固有空間分解が得られる (定理 4.3). 各部分空間は G の表現空間として既約ではないが, 有限個の既約表現の直和に分解される (命題 4.4). 函数空間 $L^2(N)$ 上では, CR-Laplacian

型作用素 $\tilde{\Delta} := \tilde{\Box}_b^0$ の他に, その複素共役 $\tilde{\Delta}^\dagger$ を考えることができる. このとき我々の目標である $L^2(N)$ の G-既約分解は 2 つの作用素 $\tilde{\Delta}$ と $\tilde{\Delta}^\dagger$ の同時固有空間分解として得られる (定理 5.2 (ii)). 一方, 各々の固有空間には Paley-Wiener 型の記述が与えられる (定理 5.2 (i)).

§1. Heisenberg 群上の CR 構造.

Heisenberg 代数 $\mathfrak{n}$ を, 次のように括弧積が与えられた $2m+1$ 個の元 $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, C$ を基底とする Lie 代数として定義する:

$$[X_k, X_l] = [Y_k, Y_l] = 0, \quad [X_k, Y_l] = \delta_{kl} C, \quad [C, X_k] = [C, Y_k] = 0 \quad (1 \le k, l \le m).$$

Lie 代数 $\mathfrak{n}$ の複素化を $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ と書くものとし, $Z_k := (X_k - iY_k)/\sqrt{2}$, $\bar{Z}_k := (X_k + iY_k)/\sqrt{2} \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ とすると

$$[Z_k, Z_l] = [\bar{Z}_k, \bar{Z}_l] = 0, \quad [Z_k, \bar{Z}_l] = i\delta_{kl} C \qquad (1 \le k, l \le m) \tag{1.1}$$

が成り立ち, 一方

$$\sqrt{2} \sum_{k=1}^m (x_k X_k + y_k Y_k) = \sum_{k=1}^m (z_k Z_k + \bar{z}_k \bar{Z}_k) \quad (x_k, y_k \in \mathbb{R},\ z_k := x_k + iy_k)$$

である. よって $z = (z_k) \in \mathbb{C}^m$ と $c \in \mathbb{R}$ について, Heisenberg 群 $N := \exp \mathfrak{n}$ の元 $\exp(-cC + \sum_{k=1}^m (z_k Z_k + \bar{z}_k \bar{Z}_k))$ を $n(c, z)$ と書くものとすると, Campbell-Hausdorf の公式から

$$n(c, z) n(c', z') = n(c + c' + \Im(\textstyle\sum_{k=1}^m z_k \bar{z}'_k),\ z + z') \qquad (c, c' \in \mathbb{R},\ z, z' \in \mathbb{C}^m)$$

が得られる. 以後 Lie 群 N 上の左不変複素ベクトル場と $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ の元を同一視する. すなわち N 上の滑らかな関数 ϕ への $Z = X + iY \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ $(X, Y \in \mathfrak{n})$ の作用を

$$X\phi(n) := \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \phi(n \exp tX) \quad (n \in N), \quad Z\phi := X\phi + iY\phi$$

と定義する. このとき $\bar{Z}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ の $n = n(c, z) \in N$ での複素接ベクトルは $-(\frac{iz_k}{2})\frac{\partial}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ となり, 複素微分形式 $d\bar{z}_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ とのカップリングを考えると

$$\langle \bar{Z}_k, d\bar{z}_l \rangle = \delta_{kl} \tag{1.2}$$

となる. Lie 群 N 上の複素接ベクトル束 $T(N)_{\mathbb{C}}$ の部分ベクトル束 $A(N)$ を $A_n(N) := \mathrm{span}\langle (\bar{Z}_1)_n, \ldots, (\bar{Z}_m)_n \rangle_{\mathbb{C}}$ $(n \in N)$ で定義する. このとき $A(N)$ の切断の空間 $\Gamma(A(N))$ は $C^\infty(N)$ 加群としてベクトル場 $\bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_m$ から生成されており, (1.1) より Lie 括弧について閉じている (すなわち $A(N)$ は対合的である). 一方 $A(N)$ の複素共役

$\overline{A(N)}$ は $Z_1, \ldots, Z_m$ から同様に定義されるから $A(N) \cap \overline{A(N)} = \{0\}$. よって $A(N)$ は N 上の CR 構造である.

Remark. 写像 $\iota : N \ni n(c,z) \mapsto (c + i|z|^2/2, z) \in \mathbb{C}^{m+1}$ (ただし $|z|^2 := \sum_{k=1}^m |z_k|^2$) の像を $\Sigma \subset \mathbb{C}^{m+1}$ とすると, Σ は Siegel 領域 $D_{m+1} := \{ w = (w_0, w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{C}^{m+1} ; \Im w_0 > \sum_{k=1}^m |w_k|^2/2 \}$ の Shilov 境界であり, 自然に CR 構造が定まる. この CR 構造を ι によって N 上に引き戻したものが, $A(N)$ に他ならない ([7], [9]).

関係式 (1.2) より, $A(N)$ の双対ベクトル束 $A^*(N)$ の切断の空間 $\Gamma(A^*(N))$ は自然に $\mathrm{span}\langle d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_m \rangle_{C^\infty(N)}$ と同一視できる. より一般に, 集合 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ (ただし $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq m$) について $d\bar{z}_I := d\bar{z}_{i_1} \wedge d\bar{z}_{i_2} \wedge \ldots d\bar{z}_{i_q}$ と書くものとすると, $\Gamma(\bigwedge^q A^*(N))$ の元は

$$\omega = \sum_{\sharp I = q} \phi_I d\bar{z}_I \tag{1.3}$$

の形の微分形式とみなせる. 言い換えると, 包含写像 $A(N) \hookrightarrow T(N)_{\mathbb{C}}$ から自然に定まる射影 (制限写像) $P_{\mathrm{rest}} : \Gamma(\bigwedge^q T^*(N)_{\mathbb{C}}) \twoheadrightarrow \Gamma(\bigwedge^q A^*(N))$ によって, (1.3) の形の微分形式 ω と, その像 $P_{\mathrm{rest}}(\omega)$ を同一視する. 微分作用素 $\bar{\partial}_b : \Gamma(\bigwedge^q A^*(N)) \to \Gamma(\bigwedge^{q+1} A^*(N))$ を

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_b \omega(W_1, W_2, \ldots, W_{q+1}) := & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} W_i \omega(W_1, \ldots, \hat{W}_i, \ldots, W_{q+1}) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([W_i, W_j], W_1, \ldots, \hat{W}_i, \ldots, \hat{W}_j, \ldots, W_{q+1}) \\ & (\omega \in \Gamma(\bigwedge^q A^*(N)), \quad W_1, \ldots, W_{q+1} \in \Gamma(A(N))) \end{aligned}$$

と定義する ($\hat{W}_i$ は W_i を除くことを意味する). 通常の外微分作用素 $d : \Gamma(\bigwedge^q T(N)_{\mathbb{C}}) \to \Gamma(\bigwedge^{q+1} T(N)_{\mathbb{C}})$ と $\bar{\partial}_b$ との間には $d \circ P_{\mathrm{rest}} = P_{\mathrm{rest}} \circ \bar{\partial}_b$ という関係が成り立つから, $\bar{\partial}_b \circ \bar{\partial}_b = 0$ である. 一方, (1.3) の形の ω については

$$\bar{\partial}_b \omega = \sum_{k=1}^m \sum_I \bar{Z}_k \phi_I \, d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_I \tag{1.4}$$

となる.

§2. Heisenberg 群 N 上に作用する変換群.

正数 $a > 0$ とユニタリ行列 $u \in \mathrm{U}(m)$ について, Lie 群 N 上の自己同型写像

$h(a,u): N \to N$ を $h(a,u)\cdot n(c_0,z_0) := n(a^2c_0, auz_0)$ $(c_0 \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{C}^m)$ と定義し, 元 $n \in N$ と $a > 0,\ u \in \mathrm{U}(m)$ について, N 上の変換 $g(n,a,u): N \to N$ を $g(n,a,u)n_0 := n\,(h(a,u)\cdot n_0)$ $(n_0 \in N)$ と定めると (右辺は N の元としての n と $h(a,u)\cdot n_0$ の積), 変換の集合 $G := \{\, g(n,a,u)\,;\, n \in N,\ a > 0,\ u \in \mathrm{U}(m)\,\}$ は群をなす. 実際 G は N と直積群 $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{U}(m)$ との半直積と同型である.

Remark. Hermite 行列

$$J_{m+2} := \begin{pmatrix} & & -i \\ & I_m & \\ i & & \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(m+2,\mathbb{C})$$

の表す Hermite 形式を保存する線形変換の群を $\mathrm{SU}(J_{m+2})$ と書く: $\mathrm{SU}(J_{m+2}) := \{\, S \in \mathrm{GL}(m+2,\mathbb{C})\,;\, S^*J_{m+2}S = J_{m+2}\,\}$. 群 $\mathrm{SU}(J_{m+2})$ は $\mathrm{SU}(m+1,1)$ と同型であり, $S = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tc & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(J_{m+2})$ $(A \in \mathrm{M}(m+1,\mathbb{C}),\ b,c \in \mathbb{C}^{m+1},\ d \in \mathbb{C})$ と $w \in \mathbb{C}^{m+1}$ について $S\cdot w := ({}^tcw + d)^{-1}(Aw + b)\mathbb{C}^{m+1}$ と定義すると, §1 の Remark で言及した $\Sigma \subset \mathbb{C}^{m+1}$ に $\mathrm{SU}(J_{m+2})$ は推移的に作用している. 次のように定義される $N(c,z)$ $(c \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}^m)$, $A(a)$ $(a > 0)$, $M(\theta,v)$ $(0 \le \theta < 2\pi,\ v \in \mathrm{SU}(m))$ は $\mathrm{SU}(J_{m+2})$ の元である:

$$N(c,z) := \begin{pmatrix} 1 & i\,{}^t\bar{z} & c + i|z|^2/2 \\ & I_m & z \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A(a) := \begin{pmatrix} a & & \\ & I_m & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix},$$

$$M(\theta,v) := \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & & \\ & v & \\ & & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

実際 全ての $N(c,z)A(a)M(\theta,v)$ からなる集合 $\tilde{G}$ は $\mathrm{SU}(J_{m+2})$ の放物型部分群をなす. さらに $\varpi : \tilde{G} \ni N(c,z)A(a)M(\theta,u) \mapsto g(n(c,z),a,e^{i\theta}v) \in G$ は全射で局所同型であり, G の N への作用と $\tilde{G} \subset S$ の Σ への作用は $\iota : N \to \Sigma$ に関して同変である.

群 N 上の測度 $d\mu$ を $d\mu(n) := dc\,dx\,dy$ $(n = n(c,x+iy) \in N,\ c \in \mathbb{R}, x,y \in \mathbb{R}^m)$ と定めると, $d\mu$ は N の Haar 測度である. このとき $g = g(n,a,u) \in G$ について

$$d\mu(g\cdot n_0) = a^{2m+2}d\mu(n_0) \quad (n_0 \in N) \tag{2.1}$$

が成り立つ.

変換群 G の $T(N)_{\mathbb{C}}$ への作用は部分ベクトル束 $A(N)$ を保存する. よって G の $\Gamma(\bigwedge^q A^*(N))$ への反傾作用が次のように定義できる:

$$g_*\omega(W_1,\ldots,W_q) := \omega(g_*^{-1}W_1,\ldots,g_*^{-1}W_q)$$
$$(g\in G,\ \omega\in\Gamma(\bigwedge^q A^*(N)),\ W_1,\ldots,W_q\in\Gamma(A(N))).$$

このとき次の補題が成り立つ.

補題 2.1. 任意の $g\in G$ について $\bar\partial_b\circ g_* = g_*\circ\bar\partial_b$.

さて ω が (1.3) の形で表されるとき

$$g_*\omega = \sum_I (\phi_I\circ g^{-1})\, g_*d\bar z_I \tag{2.2}$$

であり, 一方 $g=g(n,a,u)$ とすると, 或る $\binom{m}{q}$ 次のユニタリ行列 $(\tau_{IJ}(u))_{\sharp I=\sharp J=q}$ があって

$$g_*d\bar z_I = a^{-q}\sum_{\sharp J=q}\tau_{IJ}(u)\,d\bar z_J, \tag{2.3}$$

となる. 対応 $u\mapsto(\tau_{IJ}(u))$ は $\bigwedge^q\mathbb{C}^m$ 上に自然に定義される $\mathrm{U}(m)$ のユニタリ表現 τ_q の行列表示に他ならない.

§3. 微分形式の 2 種類の内積と Laplacian 型作用素.

Lie 群 N は多様体としては $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m\equiv\mathbb{R}^{2m+1}$ と微分同相であるから, その上の急減少函数の空間 $\mathcal{S}(N)$ を考えることができる. 函数 $\phi\in\mathcal{S}(N)$ について, $\hat\phi\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m)$ を

$$\hat\phi(\lambda,z) := e^{|\lambda||z|^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda c}\phi(n(c,z)))\,dc \quad (\lambda\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}^m) \tag{3.1}$$

によって定める. すなわち $\hat\phi$ は N の中心に関する Fourier 変換に $e^{|\lambda||z|^2/2}$ をかけたものである (これより $\phi\in L^2(N)$ についても $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^m$ 上の函数 $\hat\phi$ が定義できる). 通常のように函数 $\phi,\phi'\in\mathcal{S}(N)$ の内積を $(\phi|\phi') := \int_N \phi(n)\overline{\phi'(n)}\,d\mu(n)$ と定義すると, (2.1) より

$$(\phi\circ g^{-1}|\phi'\circ g^{-1}) = a^{2m+2}(\phi|\phi') \quad (g=g(n,a,u)\in G) \tag{3.2}$$

であり, 一方 Plancherel の公式から

$$(\phi|\phi') = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^m}\hat\phi(\lambda,z)\overline{\hat\phi'(\lambda,z)}e^{-|\lambda||z|^2}\,dx\,dy\,d\lambda \quad (z=x+iy)$$

となる. ここで ϕ と ϕ' の新たな内積 $\langle\phi,\phi'\rangle$ を

$$\langle\phi,\phi'\rangle := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^m}\hat\phi(\lambda,z)\overline{\hat\phi'(\lambda,z)}e^{-|\lambda||z|^2}\,dx\,dy\,|\lambda|\,d\lambda \tag{3.3}$$

と定義する.

補題 3.1. 函数 $\phi, \phi' \in \mathcal{S}(N)$ と $g = g(n, a, u) \in G$ について

$$\langle \phi \circ g^{-1}, \phi' \circ g^{-1} \rangle = a^{2m} \langle \phi, \phi' \rangle.$$

次に $\mathcal{S}^q(N) := \left\{ \sum_{\sharp I = q} \phi_I d\bar{z}_I \in \Gamma(\bigwedge^q A^*(N))\,;\, \phi_I \in \mathcal{S}(N) \text{ for all } I \right\}$ とし, $\omega = \sum_{\sharp I = q} \phi_I d\bar{z}_I$, $\omega' = \sum_{\sharp I = q} \phi'_I d\bar{z}_I \in \mathcal{S}^q(N)$ について 2 種類の内積を

$$(\omega | \omega')_q := \sum_I (\phi_I | \phi'_I), \quad \langle \omega, \omega' \rangle_q := \sum_I \langle \phi_I, \phi'_I \rangle$$

と定義する. 前者は $W = cC + \sum_{k=1}(x_k X_k + y_k Y_k) \in \mathfrak{n}$ について $\|W\|^2 := c^2 + \sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2)$ とおくことから定まる N 上の不変計量によって自然に定義される内積である. 群 G の作用は $\mathcal{S}^q(N)$ を保存することに注意すると, 関係式 (2.2), (2.3), (3.2) および補題 3.1 から次の補題が得られる.

補題 3.2. 元 $g = g(n, a, u) \in G$ と $\omega, \omega' \in \Gamma(\bigwedge^q A^*(N))$ について

$$(g_*\omega | g_*\omega')_q = a^{2m+2-2q} (\omega | \omega')_q, \quad \langle g_*\omega, g_*\omega' \rangle_q = a^{2m-2q} \langle \omega, \omega' \rangle_q.$$

2 つの内積に関する $\bar{\partial}_b$ の形式的な共役作用素を考えるために次のような $\mathcal{S}^q(N)$ の部分空間を考える:

$$\mathcal{S}_0^q(N) := \left\{ \sum_{\sharp I = q} \phi_I d\bar{z}_I \in \mathcal{S}^q(N)\,;\, \operatorname{supp} \hat{\phi}_I \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^m \text{ for all } I \right\}.$$

微分作用素 $\bar{\partial}_b$ は $\mathcal{S}^q(N)$ および $\mathcal{S}_0^q(N)$ をそれぞれ $\mathcal{S}^{q+1}(N)$ および $\mathcal{S}_0^{q+1}(N)$ の中にうつす.

命題 3.3. 線形作用素 $\tilde{\vartheta}_b : \mathcal{S}_0^q(N) \to \mathcal{S}_0^{q-1}(N)$ を, 任意の $\omega_0 \in \mathcal{S}_0^q(N)$ と $\omega \in \mathcal{S}^{q-1}(N)$ について

$$\langle \tilde{\vartheta}_b \omega_0, \omega \rangle_{q-1} = (\omega_0 | \bar{\partial}_b \omega)_q$$

が成り立つように定義することができる.

群 G の作用は $\mathcal{S}_0^q(N)$ を保存し, しかも次の命題が成り立つ.

命題 3.4. 任意の $g \in G$ について $g_* \circ \tilde{\vartheta}_b = \tilde{\vartheta}_b \circ g_*$.

証明. 元 $g = g(n, a, u)$ と任意の $\omega_0 \in \mathcal{S}_0^q(N)$ および $\omega \in \mathcal{S}^{q-1}(N)$ について $\langle g_* \circ \tilde{\vartheta}_b \omega_0, \omega \rangle_{q-1} = \langle \tilde{\vartheta}_b \circ g_* \omega_0, \omega \rangle_{q-1}$ を示せばよい. 補題 3.2 から

$$\langle g_* \circ \tilde{\vartheta}_b \omega_0, \omega \rangle_{q-1} = a^{2m-2(q-1)} \langle \tilde{\vartheta}_b \omega_0, g_*^{-1} \omega \rangle_{q-1} = a^{2m-2q+2} (\omega_0 | \bar{\partial}_b \circ g_*^{-1} \omega)_q$$

右辺は 補題 2.1 から $a^{2m-2q+2}(\omega_0 | g_*^{-1} \circ \bar{\partial}_b \omega)_q$ に等しく, 再び補題 3.2 から

$$a^{2m-2q+2} (\omega_0 | g_*^{-1} \circ \bar{\partial}_b \omega)_q = (g_* \omega_0 | \bar{\partial}_b \omega)_q = \langle \tilde{\vartheta}_b \circ g_* \omega_0, \omega \rangle_{q-1}$$

したがって主張は示された. □

内積 $(\cdot|\cdot)_q$ による空間 $\mathcal{S}^q(N)$ の完備化を $L^{2,q}(N)$ とする. 空間 $\mathcal{S}_0^q(N)$ は $L^{2,q}(N)$ の中で稠密であることに注意し, 作用素 $\bar{\partial}_b\circ\tilde{\vartheta}_b+\tilde{\vartheta}_b\circ\bar{\partial}_b : \mathcal{S}_0^q(N)\to\mathcal{S}_0^q(N)$ の $L^{2,q}(N)$ 上の作用素としての閉包を $\tilde{\square}_b^q$ と書き, CR-Laplacian 型作用素とよぶ. 補題 2.1 と命題 3.4 より次の結果を得る:

定理 3.5. 任意の $g\in G$ について $g_*\circ\tilde{\square}_b^q=\tilde{\square}_b^q\circ g_*$.

§4. CR-Laplacian 型作用素 $\tilde{\square}_b^q$ の固有空間.

この節では $\tilde{\square}_b^q$ による $L^{2,q}(N)$ の固有空間分解および各固有空間の具体的な記述を与える.

正数 $\lambda>0$ について, $\mathbb{C}^m$ 上の微分作用素 $\square^{(\lambda)}$ および $\bar{\square}^{(\lambda)}$ を

$$\square^{(\lambda)}:=\sum_{k=1}^{m}\Big(\bar{z}_k-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k},\quad \bar{\square}^{(\lambda)}:=\sum_{k=1}^{m}\Big(z_k-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\Big)\frac{\partial}{\partial z_k}$$

と定義する.

補題 4.1. 微分形式 $\omega=\sum_{\sharp I=q}\phi_I d\bar{z}_I\in\mathcal{S}_0^q(N)$ について $\tilde{\square}_b^q\omega=\sum_{\sharp I=q}\psi_I d\bar{z}_I$ とすると

$$\hat{\psi}_I(\lambda,\cdot)=\begin{cases}(\square^{(\lambda)}+q)\hat{\phi}_I(\lambda,\cdot) & (\lambda>0)\\ (\bar{\square}^{(-\lambda)}+m-q)\hat{\phi}_I(\lambda,\cdot) & (\lambda<0).\end{cases}$$

正数 $\lambda>0$ について, $\mathbb{C}^m$ 上の函数空間 $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ を

$$\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m):=\left\{\varphi:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C};\ \|\varphi\|_\lambda^2:=\int_{\mathbb{C}^m}|\varphi(z)|^2e^{-\lambda|z|^2}\,dx\,dy<+\infty\ (z=x+iy)\right\}$$

と定義し, $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ に属する正則函数全体のなす空間を $\mathcal{L}_0^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ とする. 多重指数 $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)\in\mathbb{Z}_{\geq0}^r$ について $C_\nu^{(\lambda)}:=\prod_{k=1}^m(\nu_k!)^{-1/2}\Big(\bar{z}_k-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)^{\nu_k}$ とし, $\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m):=\Big\{C_\nu^{(\lambda)}\varphi;\varphi\in\mathcal{L}_0^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)\Big\}$ とする. 次の補題は [2, 命題 4.1] の特別な場合である.

命題 4.2. (i) 函数空間 $\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ の閉部分空間であり, $C_\nu^{(\lambda)}:\mathcal{L}_0^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)\to\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ は等距離写像である.
(ii) 函数 $\varphi\in\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ について $(\bar{z}_k-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_k})\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\varphi(z)=\nu_k\varphi(z)$ $(k=1,\dots,m)$.
(iii) Hilbert 空間としての直和分解 $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_{\geq0}^m}^{\oplus}\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ が成り立つ.

命題 4.2 より, $l=0,1,2,\ldots$ について作用素 $\square^{(\lambda)}$ に関する l-固有空間を $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;l)$ とすると $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;l)=\sum_{|\nu|=l}^{\oplus}\mathcal{L}_\nu^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)$ (ただし $|\nu|:=\sum_{k=1}^m \nu_k$) となり, 固有空間分解は $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)=\sum_{l\geq 0}^{\oplus}\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;l)$ で与えられる. さらに, $\overline{\mathcal{L}^{(\lambda)}}(\mathbb{C}^m;l):=\{\bar{\varphi};\varphi\in\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;l)\}$ とおくと, $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m)=\sum_{l\geq 0}^{\oplus}\overline{\mathcal{L}^{(\lambda)}}(\mathbb{C}^m;l)$ が $\bar{\square}^{(\lambda)}$ に関する固有空間分解である. 以上の考察と補題 4.1 から, $\tilde{\square}_b^q$ に関する α-固有空間を $L^{2,q}(N;\alpha)$ とすると, 次の結果を得る.

定理 4.3. (i) $\phi\in L^2(N)$ について (3.1) によって $\hat{\phi}$ を定義するものとすると,

$$L^{2,q}(N;\alpha)=\left\{\sum_{\sharp I=q}\phi_I d\bar{z}_I\,;\ \begin{array}{ll}\hat{\phi}_I(\lambda,\,\cdot\,)\in\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;\alpha-q) & (\text{if }\lambda>0)\\ \hat{\phi}_I(\lambda,\,\cdot\,)\in\overline{\mathcal{L}^{(-\lambda)}}(\mathbb{C}^m;\alpha-m+q) & (\text{if }\lambda<0)\end{array}\right\}.$$

ただし, $l\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m;l)=\overline{\mathcal{L}^{(\lambda)}}(\mathbb{C}^m;l)=\{0\}$ $(\lambda>0)$ とする.
(ii) $\alpha_0:=\min(q,m-q)$ とすると

$$L^{2,q}(N)=\sum_{l\geq 0}^{\oplus}L^{2,q}(N;\alpha_0+l).$$

定理 4.3 (ii) から, "$\tilde{\square}_b^q$-調和形式" $L^{2,q}(N;0)$ が存在するのは $q=0$ または $q=m$ のときに限ることがわかる (これは [6], [8] の結果と整合している).

Lie 群 G の $L^{2,q}(N)$ 上の表現 l_q を

$$l_q(g)\omega:=a^{-m-1+q}g_*\omega\quad(g=g(n,a,u)\in G,\ \omega\in L^{2,q}(N))$$

と定義すると, 補題 3.2 より l_q はユニタリ表現である. 実際 l_q は G の部分群 $H:=\{\,g(1_N,a,u)\,;\,a>0,\ u\in \mathrm{U}(m)\,\}\simeq\mathbb{R}_+\times \mathrm{U}(m)$ の表現 $\tilde{\tau}_q:H\ni g(1_N,a,u)\mapsto\tau_q(u)=(\tau_{IJ}(u))_{\sharp I=\sharp J=q}$ (§2 の結びを参照) を G に誘導した表現 $\mathrm{Ind}_H^G\tilde{\tau}_q$ と同型である. 定理 3.5 から各固有空間上に l_q の部分表現 $(l_q,L^{2,q}(N;\alpha))$ を考えることができる. この表現を G の可解部分群 $B:=\{\,g(n,a,I_m)\,;\,n\in N,a>0\,\}$ に制限すると, 2 種類の B の既約表現の有限個の直和に分解されることが [2] からわかる ([5] も参照). したがって G の表現についても次の結果が得られる.

命題 4.4. G の表現 $(l_q,L^{2,q}(N;\alpha))$ は有限個の既約ユニタリ表現の直和に分解される.

§5. 函数空間 $L^2(N)$ の分解.

前節の結果に $q=0$ の場合を適用すると, 函数空間 $L^2(N)=L^{2,0}(N)$ の分解が得られる. この空間上の作用素 $\tilde{\square}_b^0$ を $\tilde{\Delta}$ と書く. 一方 N 上の函数の複素共役をとるという操作を σ で表し (すなわち N 上の函数 ϕ について $\sigma\phi:=\bar{\phi}$), $\tilde{\Delta}^\dagger:=\sigma\circ\tilde{\Delta}\circ\sigma$ とする. この $\tilde{\Delta}^\dagger$ はベクトル場 $\bar{Z}_1,\ldots,\bar{Z}_m$ の代わりに, その複素共役 $Z_1,\ldots,Z_m$ から出発した場合に定義される CR-Laplacian 型作用素に他ならない. 補題 4.1 から直ちに次の補題を得る.

補題 5.1. 函数 $\phi \in \mathcal{S}_0^0(N) = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(N)\,;\, \mathrm{supp}\,\hat{\phi} \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^m \right\}$ について

$$(\tilde{\Delta}\phi)\hat{}\,(\lambda,\,\cdot\,) = \begin{cases} \square^{(\lambda)}\hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) & (\lambda > 0) \\ (\bar{\square}^{(-\lambda)} + m)\hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) & (\lambda < 0), \end{cases}$$

$$(\tilde{\Delta}^{\dagger}\phi)\hat{}\,(\lambda,\,\cdot\,) = \begin{cases} (\square^{(\lambda)} + m)\hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) & (\lambda > 0) \\ \bar{\square}^{(-\lambda)}\hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) & (\lambda < 0). \end{cases}$$

これより $\tilde{\Delta}$ と $\tilde{\Delta}^{\dagger}$ は可換であり, (α, β)-同時固有空間 $\left\{ \phi\,;\, \tilde{\Delta}\phi = \alpha\phi, \quad \tilde{\Delta}^{\dagger}\phi = \beta\phi \right\}$ を $L^2(N;\alpha,\beta)$ とすると, 次の結果を得る.

定理 5.2. (i) $l = 0, 1, 2, \ldots,$ について

$$L^2(N; l, l+m) = \left\{ \phi \in L^2(N)\,;\, \begin{array}{ll} \hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) \in \mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbb{C}^m; l) & (\text{if } \lambda > 0) \\ \hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) = 0 & (\text{if } \lambda < 0) \end{array} \right\},$$

$$L^2(N; l+m, l) = \left\{ \phi \in L^2(N)\,;\, \begin{array}{ll} \hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) = 0 & (\text{if } \lambda > 0) \\ \hat{\phi}(\lambda,\,\cdot\,) \in \overline{\mathcal{L}^{(-\lambda)}}(\mathbb{C}^m; l) & (\text{if } \lambda < 0) \end{array} \right\}.$$

(ii) 函数空間 $L^2(N)$ は次のように分解される:

$$L^2(N) = \sum_{l \geq 0}^{\oplus} L^2(N; l, l+m) \oplus \sum_{l \geq 0}^{\oplus} L^2(N; l+m, l).$$

(iii) G のユニタリ表現 $(l_0, L^2(N; l, l+m))$ および $(l_0, L^2(N; l+m, l))$ は互いに同値でない既約表現である.

定理 5.2 (iii) は同定理 (i) と [4] の結果を比較することによって得られる. また, 写像 $\iota : N \to \Sigma$ によって Siegel 領域 D_n の Shilov 境界 Σ と N を同一視したとき, $L^2(N; 0, m)$ は Σ 上の Hardy 空間に他ならないことも (i) からわかる ([7] 参照).

References

[1] S. T. Ali, J.-P. Antoine and J.-P. Gazeau, "Coherent states, wavelets and their generalizations," Springer, 2000.

[2] 伊師英之, 「等質 Siegel 領域の Shilov 境界上の調和解析」, 数理解析研究所講究録 1245, 59–72.

[3] —, *Wavelet transform associated to homogeneous Siegel domains*, to appear in proceedings of the XXIV International Colioquim on Group Thoeretical Methods in Physics.

[4] —, *Wavelet transforms for semidirect product groups*, preprint.

[5] H. Liu and L. Peng, *Admissible wavelets associated with the Heisenberg group*, Pacific J. Math. **180** (1997), 101–123.

[6] T. Nomura, *Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces*, Japan. J. Math., **13** (1987), 277–332.

[7] R. D. Ogden and S. Vági, *Harmonic Analysis of a nilpotent group and function theory on Siegel domains of type II*, Adv. in Math. **33** (1979), 31–92.

[8] H. Rossi and M. Vergne, *Group representations on Hilbert spaces defined in terms of $\bar{\partial}_b$-cohomology on the Silov boundary of a Siegel domain*, Pacific J. Math., **65** (1976), 193–207.

[9] E. M. Stein, "Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals," Princeton University Press, 1993.